Woche 5

Erinnerung : <u>Inversen-Theorem</u>

Theorem 3.11 : Sei A eine $m \times m$ Matrix. Die Folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar.

(ii) $Ax = b$ hat für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung x.

(iii) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Seien x, x' Lösungen von $Ax = b$
$\Rightarrow Ax = Ax' = b \Rightarrow A(x - x') = 0$. Da die Spalten von A linear unabh. sind, gibt es nur eine Lösung, nämlich $x - x' = 0 \Rightarrow x = x'$
(Existenz der Lösung ??)

Da die Spalten von A linear unabhängig sind, hat Gauss-Elimination Erfolg auf $Ax = b$ (Theorem 3.5)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wenn $Ax=b$ für alle b eine eindeutige Lösung hat, dann auch für

$b = e_1, e_2, \dots, e_m$ (Standard-Einheitsvektoren).

Das heisst, es gibt $v_1, v_2, \dots, v_m$:

$$A v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad A v_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{I} \Rightarrow AB = I$$

Inverse von A kann mit Gauss-Elimination berechnet werden!

LU- und LUP-Zerlegung (3.4)

Gauss-Elimination, 3×3, ohne Zeilenvertauschung hat immer diese Form, wenn erfolgreich:

$$\underbrace{\overset{E_{32}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c_{32} & 1 \end{bmatrix}} \overset{E_{31}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}_{L^{-1}} A = U \quad \Big| \quad L^{-1}A = U$$

obere Dreiecksmatrix

ziehe $c_{21} \cdot$ (Zeile 1) von Zeile 2 ab

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{21} & 1 & 0 \\ c_{32}c_{21} - c_{31} & -c_{32} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{kompliziert}$$

$\downarrow$ Inverse

Multiplikation von links mit L

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{einfach!} \quad \Big| \quad A = LU$$

$\uparrow$ LU-Zerlegung

Theorem 3.13: Sei A eine $m \times m$ Matrix, auf der Gauss-Elimination ohne Zeilenvertauschungen Erfolg hat und A in eine obere Dreiecksmatrix U transformiert hat. Sei c_{ij} das Vielfache von Zeile j, das von Zeile i abgezogen wird, wenn wir in Spalte j eliminieren. Dann gilt $A = LU$, wobei

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{m1} & \cdots & c_{m,m-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

(L ist eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, und L wird bei Gauss „nebenbei" berechnet; Zeit für Berechnung von $A = LU$ ist $O(m^3)$.)

Beweis: Betrachte feste Zeile i. Wann immer sich Zeile i ändert, subtrahieren wir $c_{ij} \cdot (\text{Zeile } j)$ für ein $j < i$.

Zu diesem Zeitpunkt ist Zeile j bereits finalisiert (in U).

$$
\begin{array}{r|cccccc|l}
 & u_{11} & \cdots & & & & & \leftarrow \text{finalized (in } U\text{)} \\
 & 0 & u_{22} & \cdots & & & & \leftarrow \text{finalized (in } U\text{)} \\
 & 0 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\
\text{row } j & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{u_{jj}} & \cdots & u_{jm} & \leftarrow \text{finalized (in } U\text{)} \\
\vdots & & & & & & & \\
\text{row } i & 0 & 0 & \cdots & \star_{ij} & \cdots & \star_{im} & \leftarrow \text{now subtract } c_{ij} \cdot (\text{row } j)
\end{array}
$$

Was passiert mit Zeile i über den ganzen Algorithmus?

$$
\begin{aligned}
& \text{Zeile } i \text{ von } A \quad (\text{zu Beginn}) \\
-c_{i1} \cdot \; & (\text{Zeile } 1) \text{ von } U \; (\text{Schritt } 1) \\
-c_{i2} \cdot \; & (\text{Zeile } 2) \text{ von } U \; (\text{Schritt } 1) \\
\vdots \; & \\
-c_{i,i-1} \cdot \; & (\text{Zeile } i-1) \text{ von } U \; (\text{Schritt } i-1) \\
= \; 1 \cdot \; & \text{Zeile } i \text{ von } U \; (\text{Finalisiert})
\end{aligned}
$$

$$
\text{Zeile } i \text{ von } A = \underbrace{[c_{i1} \; c_{i2} \ldots c_{i,i-1} \; 1 \; 0 \ldots 0] \; U}_{\substack{(\text{Zeilen-Vektor-Matrix-Produkt} \\ \approx \text{ Linearkombination der Zeilen})}}
$$

Für alle Zeilen:

$$
A = \underbrace{\begin{bmatrix}
1 & & & & & 0 \\
c_{21} & 1 & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
c_{i1} & c_{i2} \ldots & c_{i,i-1} & 1 & & \\
\vdots & & & & \ddots & \\
c_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{m,m-1} & 1
\end{bmatrix}}_{L} U
$$

Lösen von $Ax = b$ mit Hilfe von $A = LU$:

$$Ax = b : \quad \overbrace{L\underbrace{Ux}_{y}}^{A} = b$$

L ist eine untere Dreiecksmatrix

- Löse $Ly = b$ nach y (Vorwärtseinsetzung)
- Löse $Ux = y$ nach x (Rückwärtseinsetzung)

Beides in Zeit $O(m^2)$ Zeit; LU-Zerlegung lohnt sich, wenn $Ax = b$ für viele verschiedene b gelöst werden muss.

z.B. bei Berechnung von A^{-1} ($b = e_1, e_2, \dots, e_m$)

Was, wenn Zeilenvertauschungen nötig sind? LU-Zerlegung existiert dann nicht immer.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}}_{U}$$

hat keine Lösung. Es müsste gelten:

$$0 = l_{11} u_{11} \qquad\qquad 1 = l_{11} u_{12} \Rightarrow l_{11} \neq 0$$

$$1 = l_{21} u_{11} \qquad\qquad \text{eins von } l_{11}, u_{11} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u_{11} \neq 0$$

LUP-Zerlegung (offizielle Korrektheitsbeweis von Gauss):

Theorem 3.18: Sei A eine $m \times m$ Matrix mit lin. unabh. Spalten. Dann gibt es drei $m \times m$ Matrizen P, L, U mit

$$PA = LU, \quad (A = P^{-1}LU = P^{T}LU)$$

wobei L und U wie vorher und P eine Permutationsmatrix (Matrix einer linearen Transformation, die die Zeilen umsortiert)

Beispiel: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_1 \end{bmatrix}$

L, P, U können nebenbei in $O(m^3)$ berechnet werden.

$Ax = b$ für alle b kann damit in $O(m^2)$ gelöst werden.

Clicker:

$(A\ B)\ C$ $\qquad\qquad$ $A\ (B\ C)$

$(2\times3)\cdot(3\times4)$ $\qquad\qquad$ $(3\times4)\cdot(4\times4)$

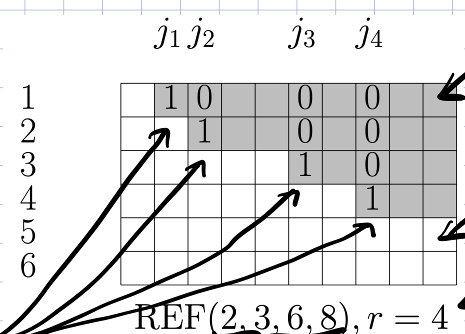
$(2\times4)\cdot(4\times4)$ $\qquad\qquad$ $(2\times3)\cdot(3\times4)$

Gauss-Jordan-Elimination (3.5)

$Ax = b \rightarrow R_0 x = c$ mit R_0 in Zeilenstufenform.

Funktioniert für jedes System!

grau: irgendwas



weiss: 0

Wie viele Stufen?

Stufen

Wo sind die Stufen?

Def. 3.19: Sei $R=[r_{ij}]_{i=1,\,j=1}^{m\quad n}$ eine $m\times n$ Matrix.
R ist in Zeilenstufenform (REF) falls folgendes gilt:
es gibt $r\le m$ Spaltenindices $1\le j_1<j_2<\dots<j_r\le m$,
so dass:

(i) Für $i=1,2,\dots,r$ gilt $r_{ij_i}=1$
(Einsen in grau)

(ii) Für alle i,j gilt: $r_{ij}=0$ wann immer
$i>r$ (komplett weisse Zeilen) oder $j<j_i$
(teilweise weisse Zeilen) oder $j=j_k$ für
ein $k>i$ (Nullen in Grau).

Wenn $r=m$: R ist in reduzierter Zeilenstufen-
Form (RREF) (keine komplett weissen Zeilen).
Genaue Beschreibung der Form: REF$(j_1,j_2,\dots,j_r)$
oder RREF$(j_1,j_2,\dots,j_m)$

	1	j_1 (2)	j_2 (3)	4	5	j_3 (6)	7	j_4 (8)	9	10
1		1	0			0		0		
2			1			0		0		
3						1		0		
4								1		

RREF$(2,3,6,8), r=4$

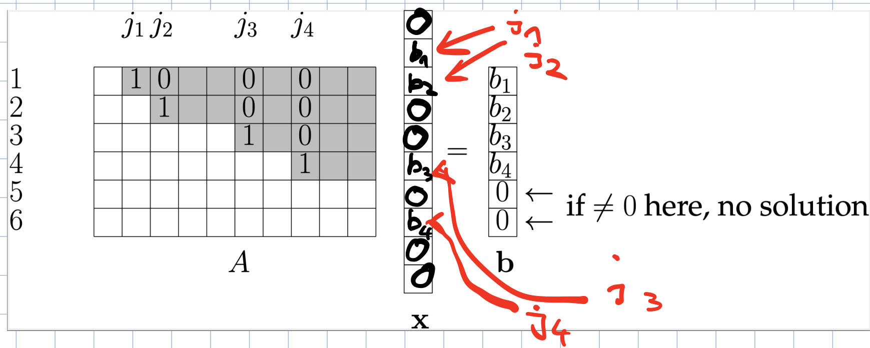
		j_1	j_2	
1		1	0	
2			1	
3				
4				
5				
6				

REF$(2,3), r=2$

Beob: Eine Matrix in REF$(j_1,j_2,\dots,j_r)$ hat Rang r.

Beweisskizze: Spalten $j_1, j_2, \ldots, j_r$ sind die unabh. Spalten

Direkte Lösung von $Ax = b$, wenn A in
REF($j_1, j_2, \ldots, j_r$) ist (Zeilen $i > r$ sind Null):



Wenn $b_i \neq 0$ für $i > r$: keine Lösung!

Sonst:

$$x_j = \begin{cases} b_i, & \text{falls } j = j_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Elimination: wenn A nicht in REF ist.

- $Ax = b \Rightarrow R_0 x = c$ (gleiche Lösungen, R_0 in REF)
- Für $R_0 x = c$, direkte Lösung

Wie Gauss, ausser ...

- bringe Pivots auf 1 (r zählt die Anzahl der Stufen bisher):

Hier: Fokus auf A, aber rechte Seite b muss genauso transformiert werden!

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 4 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & 12 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (r=0)$$

Zeilendivision

divide (row 1) by 2:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 12 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

übliche Zeilen-subtraktionen

subtract 6·(row 1) from (row 2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

subtract 4·(row 1) from (row 3):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

downward step made, next column!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad (r=1)$$

Hässlicher Fall

ist ein schöner Fall: Keine neue Stufe hier, nächste Spalte!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad (r=1)$$

exchange (row 2) and (row 3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

divide (row 2) by -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

-Elimination auch <u>oberhalb</u> des Pivots:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

subtract 1·(row 2) from (row 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

downward step made, next column!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix} \quad (r=2)$$

subtract 1·(row 3) from (row 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix}$$

m downward steps made, done!

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad (r=3)$$

$\overbrace{\text{RREF}(1,3,4)}$

Offizieller Korrektheitsbeweis:

Theorem 3.21: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gibt es eine invertierbare $m \times m$ Matrix M, so dass $R_0 = MA$ in REF ist.

M ist das Produkt von (invertierbaren) Zeilenoperationsmatrizen:

- Zeilenvertauschungen
- Zeilendivisionen (Pivot $\to 1$)
- Zeilensubtraktionen (unter und über dem Pivot)

Lösen von $Ax = b$:

$R_0 x = c$, $c = Mb$ (bekommen wir durch Anwendung der Zeilenop. auch auf b). $R_0 x = c$ hat die gleichen Lösungen wie $Ax = b$ (M kann rückgängig gemacht werden, Beweis von Lemma 3.3 ist anwendbar). $R_0 x = c$ kann direkt gelöst werden.

Lemma 3.22: Sei A eine $m \times n$ Matrix, M eine invertierbare $m \times m$ Matrix, $R_0 = MA$ in REF$(j_1, j_2, \ldots j_r)$. Dann hat A genau die unabh. Spalten $j_1, j_2, \ldots j_r$.

Beweis:

Spalte j von $\begin{matrix} A \\ R_0 \end{matrix}$ ist abhängig $\Leftrightarrow$
es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$: $\underbrace{\begin{matrix} Ax = 0 \\ R_0 x = 0 \end{matrix}, x_j = -1, x_k = 0 \text{ für alle } k > j}_{\text{Spalte } j \text{ eine Linearkombination der vorherigen Spalten}}$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\;\; \text{abh. Spalte} \\ \quad\quad\; \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

x funktioniert für $A \Leftrightarrow x$ funktioniert für $R_0 = MA$,
weil $Ax = 0$ und $MAx = 0$ die gleichen Lösungen haben
D.h. A und R_0 haben die gleichen (un)abhängigen
Spalten.

Wenn A invertierbar ist: alle Spalten sind unabhängig
$\Rightarrow R_0$ in REF$(1, 2, \ldots m)$ $\underset{MA}{\overset{\shortparallel}{R_0}} = I$, $M = A^{-1}$

Berechnung der CR-Zerlegung:
Wir erinnern uns an Theorem 2.23:

$$\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{C}_{\substack{m \times r \\ \uparrow \\ \text{unabh. Spalten}}} \cdot \underbrace{R}_{r \times n} \longleftarrow$$ wie sind die unabh. Spalten zu kombinieren, um alle Spalten zu bekommen?

Theorem 3.4. Sei A eine $m \times n$ Matrix, $A = CR$
(nach Theorem 2.23) $A \to R_0 = MA$ in

REF$(j_1, j_2, \dots, j_r)$ (Gauss-Jordan). Dann gilt:

- R = die Submatrix der ersten r Zeilen von R_0 (die Zeilen, die nicht komplett Null sind)
- C = die Submatrix der Spalten $j_1, j_2, \dots j_r$ von A (die unabh. nach Lemma 3.22).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{R}$$

Übungen:

$$A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R$$

Beweis: $R_0 = M\underbrace{CR}_{A}$.

C hat Spalten $j_1, j_2, \dots j_r$ von A

MC hat $\underbrace{\text{Spalten } j_1, j_2, \dots j_r \text{ von } MA = R_0}_{\text{die Standard-Einheitsvektoren } e_1, e_2, \dots, e_r}$

Das heisst

$$R_0 = MCR = \begin{bmatrix} \underbrace{I}_{r\times r} \\ \hline \underbrace{0}_{(m-r)\times r} \end{bmatrix} R = \underbrace{\begin{bmatrix} R \\ \hline 0 \end{bmatrix}}_{R_0} \leftarrow \text{die ersten } r \text{ Zeilen von } R_0$$